

Лука Пачоли и его трактат «О божественной пропорции»

А. И. ЩЕТНИКОВ

Биографический очерк

ЛУКА ПАЧОЛИ (LUCA PACIOLI или PACIOLLO) родился в 1445 году в небогатой семье БАРТОЛОМЕО ПАЧОЛИ в небольшом городке Борго Сан-Сеполькро, расположенном на берегу Тибра, на границе Тосканы и Умбрии, и принадлежавшем в то время Флорентийской республике. Подростком он был отдан на обучение в мастерскую знаменитого художника ПЬЕРО ДЕЛЛА ФРАНЧЕСКА (ок. 1415–1492), жившего в этом же городке. Обучение в мастерской не сделало его художником, однако выработало отменный вкус, а главное, здесь он впервые приобщился к математике, глубоко интересовавшей его учителя. Вместе со своим учителем ЛУКА часто посещал двор ФЕДЕРИКО ДЕ МОНТЕФЕЛЬТРО, герцога Урбинского. Здесь его заметил великий итальянский зодчий ЛЕОН БАТИСТА АЛЬБЕРТИ (1404–1472), который в 1464 году рекомендовал молодого человека богатому венецианскому купцу АНТОНИО ДЕ РОМПИАНЗИ в качестве домашнего учителя.

В Венеции ЛУКА учил сыновей своего патрона и учился сам, посещая лекции знаменитого математика ДОМЕНИКО БРАГАДИНО в школе Риальто. В 1470 году он составил свою первую книгу — учебник коммерческой арифметики. В этом же году он оставил Венецию и перебрался в Рим, где был принят АЛЬБЕРТИ и поселился в его доме. Однако через два года ПАЧОЛИ покинул Рим и принял монашеский постриг, став францисканцем.

После пострига брат ЛУКА некоторое время живёт на родине в Сан-Сеполькро. С 1477 по 1480 год он преподаёт математику в университете в Перудже. Затем в течении восьми лет он живёт в Заре (ныне — Задар в Хорватии), где занимается теологией и математикой, иногда совершая по делам ордена поездки по другим городам Италии. В эти годы ПАЧОЛИ начал писать главный труд своей жизни — энциклопедическую *Сумму арифметики, геометрии, отношений и пропорций*. В 1487 году его вновь приглашают занять кафедру в Перудже. В последующие годы он живёт в Риме, Неаполе, Падуе.

12 октября 1492 года умирает ПЬЕРО ДЕЛЛА ФРАНЧЕСКА. В следующем году работа ПАЧОЛИ над *Суммой* была, наконец, завершена. С этой рукописью он приезжает в Венецию, где в ноябре 1494 году эта книга, посвящённая юному Гвидо УБАЛЬДО ДЕ МОНТЕФЕЛЬТРО (1472–1508), ставшему в 1482 г. после смерти отца герцогом Урбинским, выходит в свет.

Примечательно то, что книга написана не на обычной для учёных трудов латыни, а на итальянском языке. У некоторых авторов можно прочесть, что ЛУКА писал свои трактаты на итальянском языке, потому что он не получил соответствующего образования и не владел латинским языком в совершенстве. Однако он был магистром теологии, а латынь была единственным языком теологических трактатов; он преподавал математику в различных университетах, а там все предметы читались на латыни; и он же перевёл всего Евклида с латыни на итальянский (правда, этот перевод так и не был издан). Потому, хотя он и не владел гуманистической латынью, школьная латынь была для него повседневным языком. Стало быть, причина, по которой он предпочёл итальянский язык латыни, состояла в дру-

гом. Вот что говорит об этом сам ЛУКА в посвящении к *Сумме* (написанном и на итальянском, и на латинском языке):

Правильное понимание трудных терминов среди латинистов прекратилось ввиду того, что хорошие учителя стали редки. И хотя для Вашего Герцогского Высочества лучше подошёл бы стиль Цицерона или ещё более высокий, однако я полагаю, что этим источником красноречия не всякий сумеет воспользоваться. Так что, принимая во внимание интересы общей пользы ваших почтительных подданных, я решил написать своё сочинение на родном местном языке, чтобы и образованные, и не образованные в равной мере могли получить удовольствие от этих занятий.

В предисловии к *Сумме* ПАЧОЛИ рассказывает о тех людях, благодаря общению с которыми у него сложилось убеждение в том, что математика рассматривает «всеобщую закономерность, применимую ко всем вещам». Он говорит об астрономии, о научном подходе к архитектуре, воплощённом в трудах ВИТРУВИЯ и АЛЬБЕРТИ, о многочисленных живописцах, развивавших искусство перспективы, «которая, если разобратся тщательно, была бы пустым местом без применения математических вычислений», среди которых выделяется «король нашего времени в живописи» ПЬЕРО ДЕЛЛА ФРАНЧЕСКА, о замечательных скульпторах. Это те мастера, «которые, пользуясь вычислениями в своих работах с помощью нивелира и циркуля, довели их до необычайного совершенства». ПАЧОЛИ говорит также о значении математики для музыки, для космографии, для торговли, для механических искусств, для военного дела.

Сумма арифметики, геометрии, отношений и пропорций — это обширный энциклопедический труд, напечатанный на 300 листах in folio. Первая часть в 224 листа посвящена арифметике и алгебре, вторая, в 76 листов — геометрии. Нумерация листов в обеих частях начинается заново. Каждая часть делится на отделы, отделы — на трактаты, трактаты — на главы.

В арифметической части *Суммы* излагаются приёмы выполнения арифметических действий; эта часть опирается на многочисленные *Книги абака*, принадлежавшие разным авторам. Алгебраические задачи, решаемые в *Сумме*, не выходят за пределы круга задач на линейные и квадратные уравнения, рассматривавшегося в арабских трактатах по «алгебре и альмукабале»; в Европе эти задачи были известны по *Книге абака* ЛЕОНАРДО ПИЗАНСКОГО (1180–1240). Из задач, привлёкших внимание математиков последующих поколений, следует отметить задачу о разделе ставки при незавершённой игре, которую сам ЛУКА решил неправильно. Пожалуй, самое существенное нововведение ПАЧОЛИ состоит в систематическом использовании синкопированной алгебраической записи — своеобразной предшественницы последующего символического исчисления. Книга содержит таблицу монет, весов и мер, принятых в разных частях Италии, а также руководство по венецианской двойной бухгалтерии. Что касается геометрической части *Суммы*, она следует за *Практической геометрией* ЛЕОНАРДО ПИЗАНСКОГО.

В первой половине 90-х годов ПАЧОЛИ живет в Урбино. Именно к этой эпохе относится картина ЯКОПО ДЕ БАРБАРИ, на которой ПАЧОЛИ изображён в сопровождении неизвестного молодого человека. По поводу личности этого молодого человека выдвигались разные гипотезы. Наиболее правдоподобным представляется предположение о том, что это — герцог Гвидо Убальдо, покровитель ПАЧОЛИ.



Рис. 1.

Портрет Луки Пачоли и неизвестного молодого человека.
Картина ЯКОПО ДЕ БАРБАРИ (Неаполь, Национальный музей)

В 1496 году учреждается кафедра математики в Милане, и Пачоли предлагают её занять. Здесь он читает учебные лекции студентам и публичные — всем желающим. Здесь же, при дворе герцога Лодовико Моро Сфорца (1452–1508) он сближается с ЛЕОНАРДО ДА ВИНЧИ. В записных книжках ЛЕОНАРДО сохранились записи: «Научись умножению корней у маэстро Луки», «попроси брата из Борго показать тебе книгу о весах». Пачоли выполнил для ЛЕОНАРДО расчёты веса гигантского конного памятника ФРАНЧЕСКО СФОРЦА. В Милане Пачоли написал послание *О божественной пропорции*, адресованное герцогу Лодовико Сфорца, а ЛЕОНАРДО выполнил к нему иллюстрации. Трактат был завершён 14 декабря 1498 года. К нескольким рукописным экземплярам трактата, вручённым властительным особам, прилагался набор правильных многогранников и других геометрических тел, о которых брат Лука говорит, что изготовил их собственноручно. (О моделях правильных многогранников он писал ещё в *Сумме*.) Сохранилось две рукописи этого трактата — одна в Публичной библиотеке в Женеве, вторая — в Амброзианской библиотеке в Милане.

В 1499 году французская армия заняла Милан, и герцог Сфорца бежал; ЛЕОНАРДО и ЛУКА в скором времени покинули город. В последующие годы ЛУКА Пачоли читает лекции в Пизе (1500), Перудже (1500), Болонье (1501–1502) и Флоренции (1502–1505). Во Флоренции ему покровительствует ПЬЕТРО СОДЕРИНИ, пожизненный гонфалоньер Республики.

Однако не все труды Пачоли напечатаны, и поэтому он снова едет в Венецию. Здесь в 1508 году он издаёт латинский перевод Евклида, принадлежащий ДЖОВАННИ КАМПАНО из Новары. Этот перевод, сделанный ещё в 1259 году с арабского языка, уже издавался в 1482 году и затем несколько раз переиздавался, но издание изобиловало опечатками и ошибками. Пачоли отредактировал перевод; по этой редакции, снабжённой многочисленными комментариями, он и читал свои университетские лекции. Однако издание оказалось невостребованным, поскольку в 1505 году БАРТОЛОМЕО ДЗАМБЕРТИ издал новый перевод *Начал*, выполненный непосредственно с греческого оригинала.

В 1509 году в Венеции была издана ещё одна книга Пачоли: *Divina proportione. Opera a tutti gl'ingegni perspicaci e curiosi necessaria. Ove ciascun studioso di Philosophia, Prospectiva,*

Pictura, Sculptura, Architectura, Musica e altre Mathematiche suavissima sottile ed admirabile doctrina consequira e delectarassi con varie questione de secretissima scientia («Божественная пропорция. Сочинение, весьма полезное всякому проницательному и любознательному уму, из коего каждый изучающий философию, перспективу, живопись, скульптуру, архитектуру, музыку или другие математические предметы извлечёт приятнейшее, остроумное и удивительное учение и развлечёт себя различными вопросами сокровеннейшей науки»).

Это печатное издание включает в себя ряд текстов. Изданию предпослано обращение к флорентийскому гонфалоньеру ПЬЕТРО СОДЕРИНИ. Первая часть (33 листа) содержит послание *О божественной пропорции*, а также трактат об архитектуре, о пропорциях человеческого тела и о принципе построения букв латинского алфавита. За ней следует *Книжка в трёх отдельных трактатах о правильных телах* (27 листов), из коих первый трактат рассматривает плоские фигуры, второй — правильные тела, вписанные в сферу, третий — правильные тела, вписанные друг в друга. Далее идут графические таблицы, отпечатанные с одной стороны листа: пропорции человеческого лица (1 лист), принцип построения букв латинского алфавита (23 листа), изображения архитектурных элементов (3 листа), выполненные на основе рисунков ЛЕОНАРДО изображения правильных и других тел (58 листов), и, наконец, «дерево пропорций и пропорциональности» — рисунок, который ПАЧОЛИ уже приводил в *Сумме* (1 лист).

В послании *О божественной пропорции* ЛУКА ПАЧОЛИ говорит о том, что ему, как старому человеку, пора на покой, чтобы «в солнечном месте подсчитывать годы». Эта его просьба была услышана, и в 1508 году он становится местоблюстителем монастыря в родном Сан-Сеполькро. Однако в декабре 1509 г. два монаха его монастыря передали генералу ордена письмо, в котором указывали на то, что «маэстро ЛУКА неподходящий человек, чтобы управлять другими», и просили освободить его от административных обязанностей. Но поддержки у начальства они не нашли, и в феврале 1510 года ЛУКА ПАЧОЛИ становится полноправным приором родного монастыря. Впрочем, распри внутри монастыря продолжались и далее.

В последние годы своей жизни брат ЛУКА продолжал ещё иногда читать лекции; его приглашали в Перуджу в 1510 году и в Рим в 1514 году, причём последнее приглашение исходило от нового папы ЛЬВА X. Умер ЛУКА ПАЧОЛИ в возрасте 72 лет, 19 июня 1517 года во Флоренции.

Обзор послания «О божественной пропорции»

В послании ЛУКИ ПАЧОЛИ *О божественной пропорции* выделяются следующие содержательные части:

Введение (гл. 1–4). Божественные качества, определение и математические свойства пропорции, возникающей при делении величины в среднем и крайнем отношении (гл. 5–23). О правильных телах, почему их не может быть больше пяти и как каждое из них вписывается в сферу (гл. 24–33). О том, как правильные тела вписываются друг в друга (гл. 34–46). О том, как в каждое из этих тел вписывается сфера (гл. 47). О том, как из правильных тел получаются усечённые и надстроенные (гл. 48–52). О других телах, вписанных в сферу (гл. 53–55). Сфера (гл. 56–57). О колоннах и пирамидах (гл. 58–69). О материальных формах представленных тел и их перспективных изображениях (гл. 70). Глоссарий (гл. 71).

Под «божественной пропорцией» ПАЧОЛИ понимает непрерывную геометрическую пропорцию трёх величин, которую ЕВКЛИД называет «делением в среднем и крайнем отношении», а в XIX веке её стали называть «золотым сечением». В определении этой пропорции и описании её свойств ПАЧОЛИ следует за ЕВКЛИДОМ. Данная пропорция возникает при делении целого на две части, когда целое так относится к большей части, как большая часть относится к меньшей. На языке равенства площадей эта же пропорция задаётся так: квадрат на большей части равен прямоугольнику, сторонами которого служат целое и меньшая часть.

Особую ценность, выделенность отношения «божественной пропорции» среди прочих отношений брат ЛУКА обосновывает доводами метафизического и теологического характера. Единственность и неизменность данной пропорции сравнивается с единственностью и неизменностью Бога, три её члена — с тремя ипостасями Святой Троицы, иррациональность отношения — с непостижимостью и невыразимостью Бога. Но помимо этих доводов имеется ещё один: с этой пропорцией связаны процедуры построения правильного плоского пятиугольника, и телесных додекаэдра и икосаэдра. Но ПЛАТОН в *Тимее* рассматривал пять правильных тел в качестве пяти элементов, из которых состоит Вселенная. Таким образом, в метафизических построениях ПАЧОЛИ соединяются мотивы христианского богословия и платоновской космологии.

Далее ЛУКА излагает различные свойства «божественной пропорции», известные по XIII и XIV книге *Начал* ЕВКЛИДА. Всего он рассматривает тринадцать таких свойств, связывая это число с числом участников тайной вечери. Вот пример одного из этих свойств: «Пусть прямая линия разделена в пропорции, имеющей середину и два края, тогда если к большей части прибавить половину всей пропорционально разделённой линии, то с необходимостью окажется, что квадрат суммы всегда будет пятикратным, то есть в 5 раз большим квадрата указанной половины». Все эти свойства он сопровождает одним и тем же числовым примером, когда длина целого отрезка равна 10, а его части составляют: меньшая $15 - \sqrt{125}$, а большая $\sqrt{125} - 5$. Пример с алгебраическим делением 10 в среднем и крайнем отношении был заимствован ЛУКОЙ ПАЧОЛИ у ЛЕОНАРДО ПИЗАНСКОГО (1180–1240), а последним — у АБУ КАМИЛА (850–930) и АЛ-ХОРЕЗМИ (787–850). Само вычисление корней соответствующего квадратного уравнения в трактате не производится: здесь ЛУКА ссылается на свою же *Сумму*, где этот результат получен «по правилам алгебры и альмукабалы». И вообще, выбранный им жанр послания предопределяет собой тот факт, что ПАЧОЛИ все результаты приводит без доказательства, хотя эти доказательства ему, вне всякого сомнения, известны.

Вслед за этим ПАЧОЛИ рассматривает пять платоновских тел. Сначала он доказывает теорему том, что этих тел — ровно пять, и не больше. Затем он приводит построения всех пяти тел, вписанных в данную сферу, в следующем порядке: тетраэдр, куб, октаэдр, икосаэдр, додекаэдр. Далее рассматривается пропорция между сторонами этих тел, вписанных в одну и ту же сферу, и приводится ряд теорем о соотношениях между их поверхностями. Затем рассматриваются некоторые способы, по которым одно правильное тело может быть вписано в другое. Наконец, обсуждается теорема о том, что в каждое правильное тело тоже может быть вписана сфера.

Теперь ПАЧОЛИ на время оставляет ЕВКЛИДА и переходит к новому материалу. А именно, он рассматривает тела, которые могут быть получены из правильных тел путём «усечения» либо «надстройки». Тела, которые получаются из правильных тел усечением — это

некоторые из полуправильных тел АРХИМЕДА. Всего имеется тринадцать полуправильных тел, что было доказано АРХИМЕДОМ. Но Пачоли с обзором этой работы АРХИМЕДА, имеющимся у ПАППА, не был знаком. Из тринадцати полуправильных тел он рассматривает шесть: усечённый тетраэдр, кубоктаэдр, усечённый октаэдр, усечённый икосаэдр, икосидодекаэдр и усечённый ромбикубоктаэдр. Два тела — усечённый куб и усечённый додекаэдр — он пропустил по непонятной причине, хотя их построение аналогично построению усечённых тетраэдра, куба и икосаэдра. Что касается усечённого ромбикубоктаэдра («тела с 26 основаниями»), ПАЧОЛИ открыл его, по-видимому, сам, и очень гордился этим открытием: именно это тело, изготовленное из прозрачных стеклянных пластин и наполовину заполненное водой, изображено в левой верхней части картины ЯКОПО ДЕ БАРБАРИ.

Надстроенные правильные и надстроенные усечённые тела у ПАЧОЛИ — это не то же самое, что исследовавшиеся в последующей математике звёздчатые многогранники КЕПЛЕРА. Тела КЕПЛЕРА получаются продлением плоскостей исходных многогранников; тела ПАЧОЛИ — построением на каждой грани исходного многогранника пирамиды, боковые стороны которой являются равносторонними треугольниками. ПАЧОЛИ приводит интересную теорему о том, что в надстроенном икосидодекаэдре пять вершин треугольных пирамид и вершина пятиугольной пирамиды лежат в одной плоскости; опущенное доказательство «возводится тончайшей практикой алгебры и альмукабалы до редкой отметки».

Далее рассматривается «тело с 72 основаниями», которым ЕВКЛИД пользовался как вспомогательным в последних двух предложениях XII книги *Начал*; это тело в литературе иногда называют «сферой КАМПАНО» (рис. 2). ПАЧОЛИ утверждает, что форма этого тела послужила геометрической основой для купола Пантеона в Риме и для сводов ряда других построек.

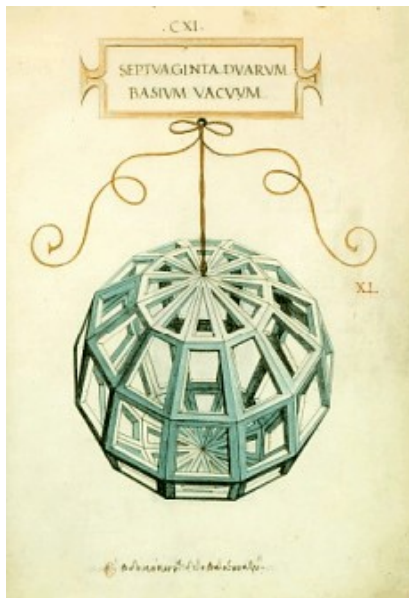


Рис. 2.

Один из рисунков
Леонардо да Винчи.

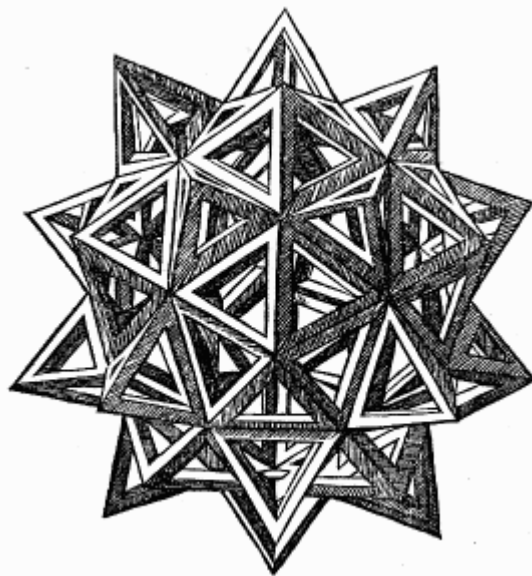


Рис. 3.

Гравюра из печатного
издания трактата.

Вслед за этим ПАЧОЛИ говорит о том, что усечением и надстройкой может быть получено бесчисленное множество многогранных форм, и переходит к рассмотрению сферы, ещё раз касаясь вписания в неё правильных тел.

Последняя часть послания *О божественной пропорции* вновь возвращает нас к Евклиду. Здесь рассматриваются многогранные призмы и цилиндр, затем — многогранные пирамиды и конус, затем — усечённые пирамиды. Пачоли приводит правила для вычисления объёмов всех этих тел, всюду указывая на то, какие из этих правил являются приближёнными, а какие — точными.

Далее Пачоли пишет о том, что к рукописным копиям трактата, вручаемым герцогу и его родственникам, прилагаются таблицы с перспективными рисунками, сделанными ЛЕОНАРДО ДА ВИНЧИ, а также «материальные формы» всех упомянутых в нём тел. Рисунки и формы многогранников были изготовлены в двух вариантах — сплошные, с цельными плоскими гранями, и полые, с одними только рёбрами. Выполнял ли ЛЕОНАРДО свои рисунки чисто расчётным путём или с натуры, мы не знаем. Часть рисунков выполнена с заметной для глаза погрешностью, однако её можно объяснить как неточностью расчётов, так и переменной точки, с которой рассматривалось изображаемое тело. Послание завершается словариком, в котором ещё раз разъясняются употреблявшиеся в тексте специальные термины.

Золотое сечение в «древней» и в «новой» эстетике

Многочисленные популярные и специальные книги и статьи, посвящённые проблеме пропорций в искусстве, рассматривают золотое сечение в качестве «самой совершенной» пропорции, причём это совершенство трактуется в этих книгах по преимуществу психологически: прямоугольник с «золотым» отношением сторон считается самым приятным для зрительного восприятия, и т. п. В этих публикациях принято рассматривать разнообразные произведения изобразительного искусства и памятники архитектуры, созданные мастерами античности и Возрождения, в качестве примеров, подтверждающих этот тезис.

Надо заметить, что от античности до нас не дошло не одного текста, в котором деление величины в среднем и крайнем отношении обсуждалось бы в качестве формообразующего начала в изобразительном искусстве и архитектуре. Похоже, что таких текстов и вовсе не существовало. Для сравнения можно рассмотреть так называемую музыкальную пропорцию $12 : 9 = 8 : 6$, задающую структуру музыкальной гармонии. Эта пропорция, открытая пифагорейцами, упоминается в десятках античных текстов, посвящённых теории музыки, — как специальных, так и общефилософских. Странно было бы, если бы золотое сечение играло аналогичную роль в архитектуре, скульптуре и живописи, а у античных авторов не осталось об этом ни одного свидетельства.

Все античные тексты, в которых обсуждается деление величины в среднем и крайнем отношении — это сугубо математические трактаты, в которых данное построение рассматривается исключительно в связи с построением правильного пятиугольника, а также двух правильных платоновских тел — икосаэдра и додекаэдра (обзор этих текстов см. HERZ-FISHLER 1998). Верно то, что интерес к правильным телам, а тем самым и к золотому сечению, не был сугубо математическим: ведь ПЛАТОН вслед за пифагорейцами стал рассматривать пять правильных тел в качестве элементарных основ мироздания, поставив тетраэдр в соответствие огню, куб — земле, октаэдр — воздуху, икосаэдр — воде, а форму додекаэдра он связал со Вселенной в целом. В этом плане, конечно, можно говорить об эстетической значимости золотого сечения, как это делал в своих сочинениях А. Ф. ЛОСЕВ; но сама эта «эстетика» носит отнюдь не психологический, но космологический характер.

В эпоху Возрождения Возвращение произошло возвращение к космологическим картинам античного платонизма, и трактат Луки Пачоли *О божественной пропорции* является важнейшим памятником этого математико-спекулятивного направления. Лука воспевает «божественную пропорцию» в начальных главах своего трактата, называя её свойства «не природными, но поистине божественными». Однако его воззрения на значение этой пропорции остаются привязанными к космологии платоновского *Тимея*, и «величайшая гармония», о которой он говорит — это гармония космоса, и никакая другая. И хотя Пачоли приложил к посланию *О божественной пропорции* трактат об архитектуре и о пропорциях человеческого тела, но о золотом сечении в этом трактате он не обмолвился ни единым словом. Стало быть, никакого другого взгляда на золотое сечение, кроме математико-космологического, у него не было, и мысль о том, что золотое сечение может выступать в качестве базовой пропорции произведений архитектуры и живописи, ему просто не приходила в голову.

В точности такие же воззрения характерны для ИОГАННА КЕПЛЕРА и других авторов эпохи Возрождения, интересовавшихся золотым сечением и ролью правильных многогранников в «гармонии мира». Так что искать в их сочинениях некую концепцию золотого сечения, связанную с эстетикой произведений искусства, — это совершенно напрасное занятие, поскольку её там попросту не было.

Судьба сочинений Пачоли. Вопрос о плагиате

После смерти Пачоли о его сочинениях помнили не слишком долгое время. Наступала эпоха грандиозных научных свершений, когда в науке стали цениться в первую очередь новые результаты, а книги Пачоли представляли собой обзоры того, что было сделано в прежние времена. ДЖИРОЛАМО КАРДАНО (1501–1576) назвал Пачоли компилятором, в чём он, со своей точки зрения, был вполне прав. Впрочем, другой выдающийся математик этой эпохи, РАФАЭЛЬ БОМБЕЛЛИ (1526–1573), сказал, что Пачоли был первым после ЛЕОНАРДО ПИЗАНСКОГО, «кто пролил свет на науку алгебры».

Возрождение интереса к личности и сочинениям Пачоли датируется 1869 годом, когда *Сумма* попала в руки к миланскому профессору математики ЛЮЧИНИ, и он обнаружил в ней *Трактат о счетах и записях*. После этого открытия на Пачоли стали смотреть как на родоначальника науки о бухгалтерском учёте, и именно этот трактат оказался самой востребованной частью его наследия, много раз переводившейся на другие языки, в том числе и на русский.

Впрочем, уже вскоре после первых публикаций *Трактата о счетах и записях* среди исследователей разгорелись жаркие споры о том, был ли ЛУКА ПАЧОЛИ его действительным автором. Было высказано сомнение, мог ли человек, далёкий от торговых дел, составить такой трактат. А если не мог, то не следует ли предположить, что здесь совершён плагиат? Думается всё же, что обвинение в плагиате в данном случае неправомерно. Пачоли нигде не говорит, что это он изобрёл двойную бухгалтерию; он лишь описывает её нормы «по венецианскому обычаю». Но ведь если мы откроем любое современное руководство по бухгалтерскому учёту, оно будет представлять собой в точности такое же нормативное описание, без ссылок на предшественников. И если Пачоли описывает систему бухгалтерского учёта по какой-то прочитанной им рукописи, то ведь он и правила умножения в столбик тоже не сам придумал, однако в данном случае обвинять его в плагиате никому не

приходит в голову. А ознакомиться с системой двойной бухгалтерии на практике он мог в то время, когда состоял домашним учителем в богатом купеческом доме.

Другое серьёзное обвинение в плагиате было выдвинуто против ПАЧОЛИ ещё в 1550 году, когда ДЖОРДЖЕ ВАЗАРИ (1511–1572) в своей книге *Жизнеописания знаменитых живописцев, ваятелей и зодчих* в главе, посвящённой ПЬЕРО ДЕЛЛА ФРАНЧЕСКА, написал следующее:

И хотя тот, кто должен был всеми силами стараться приумножить его славу и известность, ибо у него научился всему, что знал, пытался как злодей и нечестивец изничтожить имя ПЬЕРО, своего наставника, и завладеть для себя почестями, которые должны были принадлежать одному ПЬЕРО, выпустив под своим собственным именем, а именно брата ЛУКИ из Борго, все труды этого почтенного старца.

Математические сочинения ПЬЕРО ДЕЛЛА ФРАНЧЕСКА долгое время считались утерянными. Однако в 1903 году ДЖ. ПИТТАРЕЛЛИ обнаружил в Ватиканской библиотеке рукопись *Petri Pictoris Burgensis de quinque corporibus regularibus* («ПЕТРА, художника из Борго, о пяти правильных телах»). Несколько позже были обнаружены ещё две рукописи ПЬЕРО: *Перспектива в живописи (De perspectiva pingendi)* и *Об абаке (De abaco)*. Тогда же было установлено, что найденный латинский манускрипт *О пяти правильных телах* и три итальянских трактата о правильных телах в печатном издании *De Divina Proportione* представляют собой две близкие версии одного и того же текста.

Сохранившаяся рукописная книжка ПЬЕРО *О пяти правильных телах* посвящена ГВИДО УБАЛЬДО ДЕ МОНТЕФЕЛЬТРО, герцогу Урбинскому. Герцогский титул он получил в 1482 году после смерти отца. ПЬЕРО умер в 1492 году. Стало быть, дошедший до нас экземпляр книжки был переписан набело в промежутке между 1482–1492 гг. Однако сама книжка могла быть создана и раньше. ЛУКА ПАЧОЛИ в *Сумме* (VI, I, II) говорит, что книжку по перспективе ПЬЕРО написал на итальянском, а латинский перевод выполнил его друг МАТТЕО ДАЛЬ БОРГО. Таким же образом мог появиться на свет и латинский текст книжки *О пяти правильных телах*. Во всяком случае, итальянский текст, опубликованный впоследствии ПАЧОЛИ, естественно рассматривать как исходный.

Что касается этой публикации в приложении к изданию *Божественной пропорции*, её полное заглавие звучит следующим образом: *Libellus in tres partialis tractatus divisus quinque corpore regularium e dependentium active per scrutationis. D. Petro Soderino principi perpetuo populi florentinia. M. Luca Paciolo, Burgense Minoritano particulariter dicatus, feliciter incipit* («Книжка, разделённая на три отдельных трактата, о пяти правильных и зависимых [от них] телах, последовательно рассмотренных. Г[осподину] ПЕТРУ СОДЕРИНИ, постоянному предводителю флорентийского народа. М[аэстро] ЛУКА ПАЧОЛИ, миноритом из Борго, по частям продиктованная, счастливо начинается»).

Об каком-либо отношении ПЬЕРО ДЕЛЛА ФРАНЧЕСКА к трактату в этом заглавии действительно ничего не говорится. Но и своё собственное «авторство» ПАЧОЛИ обозначает весьма странным образом. А именно, он говорит, что книжка эта им *particulariter dicatus*, «по частям (или частично?) продиктована», — и не более того.

Это заставляет задуматься. Ведь ЛУКА ПАЧОЛИ в своих сочинениях вовсе не выглядит человеком, стремившимся беззастенчиво присваивать чужие результаты. Так в I разделе I главы *Суммы* он пишет:

И поскольку мы будем следовать по большей части Л. ПИЗАНСКОМУ, я намерен заявить, что когда имеется какое-нибудь предложение без автора, оно — этого Л. А когда других, кто был — авторство приведено.

Аналогичное уведомление имеется и в IV главе *Божественной пропорции*:

Первым делом я замечу, что всякий раз, когда я буду писать «первое в первой», «четвёртое во второй», «десятое в пятой», «20 в 6» и так до пятнадцатой, под первой цифрой всегда следует понимать номер предложения, а под второй — номер книги нашего философа Евклида, который всеми признаётся за главу данного факультета. Таким образом, говоря о пятом в первой, я говорю о пятом предложении его первой книги, и так же о других отдельных книгах, составляющих цельную книгу об элементах и первоначалах Арифметики и Геометрии. Но когда упоминается другое его сочинение или книга другого автора, это сочинение или этот автор называются по имени.

Не следует забывать и о том, что в те периоды, когда ЛУКА жил в своём родном городе, он имел возможность общаться с ПЬЕРО напрямую. Естественно думать, что встречи двух математиков были достаточно частыми, а их общение — содержательным. Темы книжки *О пяти правильных телах* почти наверняка обсуждались в этих беседах, а потому они оба могли в какой-то мере смотреть на неё как на свою, вне зависимости от того, кто придал ей окончательную форму.

Мы ничего не знаем и о том, какое влияние на ПЬЕРО ДЕЛЛА ФРАНЧЕСКА и ЛУКА ПАЧОЛИ оказали работы немецкого астронома и математика ИОГАННА МЮЛЛЕРА (1436–1476), более известного под латинским именем РЕГИОМОНТАН. А ведь он много жил в Италии и умер в Риме, так что итальянские математики могли быть знакомы с ним и его рукописями. Среди его сочинений имелся трактат *De quinque corporibus aequilateris, quae vulgo regularia nuncupantur, quae videlicet eorum locum impleant naturalem et quae non contra commentatorem Aristotelis Averroem* («О пяти равносторонних телах, обычно называемых правильными, а именно, какие из них заполняют естественное место, а какие нет, против АВЕРРОЭСА, комментатора АРИСТОТЕЛЯ»). До наших дней он не дошёл, но РЕГИОМОНТАН даёт его обзор в другой своей работе. В этом трактате рассматривалось построение правильных тел, их преобразования друг в друга, вычислялись их объёмы. Содержалась в нём и встречающаяся у ПАЧОЛИ идея о том, что последовательным изменением правильных тел можно получать безграничное количество полуправильных.

Далее, первая печатная книга по математике вышла в 1475 году. ПЬЕРО ДЕЛЛА ФРАНЧЕСКА жил ещё в мире рукописей, а более молодой ЛУКА ПАЧОЛИ зрелые свои годы провёл уже в мире печатных книг. Рукопись могла быть переписана для собственного пользования кем-то ещё, но каждый раз в одном экземпляре. Её переписчик совершает богоугодное дело уже потому, что продлевает жизнь рукописи, не даёт ей погибнуть. То же и в случае, когда сохранившаяся рукопись превращается в печатную книгу.

Теперь мы можем вернуться к вопросу о плагиате с оценкой, в большей мере соответствующей системе взглядов того времени. Похоже, что в ту эпоху, когда жили ПЬЕРО ДЕЛЛА ФРАНЧЕСКА и ЛУКА ПАЧОЛИ, вопрос об авторстве ещё попросту не стоял. (Средневековье, между прочим, вообще не знает авторства: можем ли мы сказать, кто был «автором» прекрасных готических соборов? Сама эта постановка вопроса очевидным образом бессмысленна. — Вот и в *Началах* Евклида большая часть результатов была переписана из других математических книг, но мы этим почему-то не возмущаемся и Евклида в плагиате не обвиняем.) Самому ПЬЕРО была интересна математика, а не слава в грядущих веках. В предид-

словии к своей латинской книжке он пишет, что она будет ему «залогом и памятником», но не у потомков вообще, а у его герцогского Высочества.

А что касается авторства как указания на то, кто первый совершил такое-то открытие, то здесь важен момент онтологический. Математик открывает какие-то неизвестные доселе тела, а КОЛУМБ в это же самое время открывает новые страны. Но КОЛУМБ не является «автором» этих стран, и точно так же математик не является «автором» открытых им тел. И ведь когда КОЛУМБ организовывал свою экспедицию, его целью были сами новые страны, а не память потомков о том, что он их открыл.

Лука Пачоли и формирование института экспертизы

Обращаясь в послании *О божественной пропорции* к миланскому герцогу ЛОДОВИКО СФОРЦА, ЛУКА ПАЧОЛИ нигде не рекомендует себя так: «Я математик, потому что могу получать новые математические результаты». Нет, он говорит о себе совершенно иначе: «Я математик, потому что я знаю математику и могу ей научить других».

Вот и ДАНТЕ в *Божественной комедии* называл АРИСТОТЕЛЯ «учителем тех, кто знает», и ЛУКА не зря эту цитату приводит. Для уяснения этого довода проведём следующее сравнение. Врач знает медицину и поэтому может лечить. Юрист знает право и поэтому может быть адвокатом. А математик знает математику — и что дальше? Он может ей учить? Но ведь и врач, и юрист тоже могут учить своим наукам — для чего в университете и существуют медицинский и юридический факультеты. Но кем может быть математик вне сферы обучения? Какое умение выделяет его среди прочих людей и делает кому-то нужным? Астроном умеет вычислять движения небесных светил и составлять гороскопы. Архитектор способен построить прекрасную виллу, военный строитель — неприступную крепость. Художники создают прекрасные произведения, услаждающие взор. А математик — какой от него может быть прок?

Посмотрим, как на этот вопрос отвечает сам ЛУКА. Прежде всего, он настаивает на том, что математика в качестве самой точной науки является основанием и пробирным камнем для всех прочих наук.

«В [нашем трактате] мы говорим о высоких и утончённых вещах, которые поистине служат испытанием и пробирным тиглем для всех изысканных наук и дисциплин: ведь из них проистекают все прочие спекулятивные действия, научные, практические и механические; и без предварительного ознакомления с ними человеку невозможно ни познавать, ни действовать, как это будет показано... Как подтверждают АРИСТОТЕЛЬ и АВЕРРОЭС, наши математические науки являются самыми истинными и стоят на первом уровне строгости, а за ними идут естественные» (гл. I).

От похвалы математике как таковой он переходит к похвалам математикам:

«Благоразумным известна пословица: *Aurum probatur igni et ingenium mathematicis*. То есть золото проверяется огнём, и пронизательность разума — математическими дисциплинами. Это высказывание говорит вам, что добрый разум математиков наиболее открыт каждой науке, ведь они привычны к величайшей абстракции и тонкости, поскольку всегда рассматривали то, что находится вне чувственной материи. Как говорит тосканская поговорка, это те, кто расщепит волос на лету» (гл. II).

Но само по себе «рассмотрение того, что находится вне чувственной материи» вряд ли способно заинтересовать властителей, к которым обращается ЛУКА. Поэтому он переходит от вещей идеальных к вещам реальным, и приводит доводы, согласно которым математика является необходимым основанием военного искусства и архитектуры:

«О Вашем Герцогском Высочестве идёт и иная добрая слава, когда крепнет уверенность близких родственников и благодарных подданных в том, что в её высочайшем Владении они защищены от всех нападений... От повседневного опыта Вашего Герцогского Высочества не скрыто, что оборона больших и малых республик, называемая также военным искусством, невозможна без знания Геометрии, Арифметики и Пропорций, каковые превосходно сочетаются с честью и пользой. И ни одно достойное занятие из тех, с которыми имеют дело инженеры и новые механики, так не ведёт к взятию [крепости] или же к долгой обороне, как те, в которых в былые времена упражнялся великий геометр АРХИМЕД из Сиракуз» (гл. II).

«Они называют себя архитекторами, но я никогда не видел у них в руках выдающейся книги нашего достойнейшего архитектора и великого математика ВИТРУВИЯ, который составил трактат *Об архитектуре* с наилучшими описаниями всякого сооружения. И те, кому я дивлюсь, пишут на воде и строят на песке, наскоро растратив своё искусство: ведь они являются архитекторами лишь по имени, ибо не ведают разницы между точкой и линией и не знают различия между углами, без чего невозможно хорошо строить... Однако есть и такие, кто восхищается нашими математическими дисциплинами, внедряя истинное руководство всеми постройками в согласии с сочинением вышеупомянутого ВИТРУВИЯ. Отклонение от него заметно, если посмотреть, каковы наши строения, как церковные, так и светские: какое искривлено, а какое перекошено» (гл. XLIV).

Говоря нынешним языком, ЛУКА рекомендует себя герцогу в качестве эксперта, причём в вопросах не собственно математических (такой эксперт герцогу несколько не нужен), но сугубо прикладных, имеющих самое прямое отношение к сохранению власти (военное дело) и процветанию (архитектура). Что же касается умения получать новые математические результаты, оно в эту эпоху ещё не рассматривалось как необходимое отличительное качество математика высокого класса, оставаясь случайным, а не сущностным признаком последнего.

Литература

- ГЛУШКОВА Ф. Р., ГЛУШКОВ С. С. Геометрическая часть «Суммы» Пачоли. *История и методология естественных наук*, **29**, 1982, с. 57–63.
- КОЛЛИНЗ Р., РЕСТИВО С. Пираты и политики в математике. *Отечественные записки*, 2001, № 7.
- ОЛЬШКИ Л. *История научной литературы на новых языках*. В 3 т. М.–Л.: ГТТИ, 1933–34. (Репринт: М.: МЦИФИ, 2000.)
- СОКОЛОВ Я. Лука Пачоли — человек и мыслитель. В кн.: ПАЧОЛИ ЛУКА. *Трактат о счетах и записях*. М.: Статистика, 1974.
- ЮШКЕВИЧ А. П. *История математики в средние века*. М.: Физматгиз, 1961.
- ARRIGHI G. Piero della Francesca e Luca Pacioli. Rassegna della questione del plagio e nuove valutazioni. *Atti della Fondazione Giorgio Ronchi*, **23**, 1968, p. 613–625.
- BIAGIOLI M. The social status of Italian mathematicians, 1450–1600. *History of Science*, **27**, 1989, p. 41–95.
- BERTATO F. M. A obra “De Divina Proportione” (1509) de Frà Luca Pacioli. *Anais do V Seminário Nacional de História da Matemática*, Rio Claro, 2003.
- BIGGIOGERO G. M. Luca Pacioli e la sua “Divina proportione”. *Rendiconti dell’Istituto lombardo di scienze e lettere*, **94**, 1960, p. 3–30.
- CASTRUCCI S. *Luca Pacioli da ‘l Borgo San Sepolcro*. Alpignano: Tallone, 2003.
- DAVIS M. D. *Piero della Francesca’s mathematical treatises: The «Trattato d’abaco» and «Libellus de quinque corporibus regularibus»*. Ravenna: Longo Editore, 1975.
- FIELD J. V. Rediscovering the Archimedean polyhedra: Piero della Francesca, Luca Pacioli, Leonardo da Vinci, Albrecht Dürer, Daniele Barbaro and Johannes Kepler. *Archive for History of Exact Sciences*, **50**, 1997, p. 241–289.

HERZ-FISCHLER R. *A mathematical history of division in extreme and mean ratio*. Waterloo: Wilfrid Laurier Univ. Press, 1987 (2^d ed. NY, Dover, 1998).

LUCAS DE BURGO. *Summa de Arithmetica, Geometria, Proportione & Proportionalita*. Venetia: Paganino de Paganinis, 1494.

LUCAS DE BURGO. *Divina Proportione*. Venetia: Paganino de Paganinis, 1509.

MANCINI G. L'opera "De corporibus regularibus" di Pietro Franceschi detto Della Francesca usurpata da fra Luca Pacioli. *Accademia dei Lincei*, 1909.

MORISON S. *Fra Luca Pacioli of Borgo San Sepolcro*. New York, 1933.

PICUTTI E. Sui plagi matematici di frate Luca Pacioli. *La Scienze*, **246**, 1989, p. 72–79.

PIERO DELLA FRANCESCA. *Libellus de quinque corporibus regularibus*. Eds. M. D. Emiliani e. a. Florence: Giunti, 1995.

PITTARELLI G. Luca Pacioli usurpò per se stesso qualche libro di Piero de' Franceschi? *Atti IV Congresso internazionale dei matematici, Roma, 6–11 aprile 1908*, III. Rome, 1909, p. 436–440.

PORTOGHESI P. Luca Pacioli e la "Divina Proportione". In: *Civiltà delle machine*, 1957, p. 22–28.

REGIOMONTANUS. *Commensorator*. Ed. Blaschke W., Schoppe G. Wiesbaden: Verlag der Akademie der Wissenschaften und der Literatur in Mainz, 1956.

RICCI I. D. *Luca Pacioli, l'uomo e lo scienziato*. Sansepolcro, 1940.

ROSE P. L. *The Italian renaissance of mathematics*. Geneva: Librairie Droz, 1975.

SPEZIALI P. Luca Pacioli et son oeuvre. *Sciences of the Renaissance*, Paris, 1973, p. 93–106.

TAYLOR R. E. *No royal road: Luca Pacioli and his times*. Chapel Hill: Univ. of North Carolina Press, 1942.

WILLIAMS K. Plagiarism in the Renaissance (Luca Pacioli and Piero della Francesca). *Mathematical Intelligencer*, **24**, 2002, p. 45–57.